A 题：弹性梁的形状分析

有一均匀的薄板状的弹性梁, 不受力(包括重力)时状态为平板, 左端水平地嵌入墙体内固定, 设梁在墙外部分的中性线只会受力弯曲而其长度 L 不变. 设中性线的左端点坐标为(0,0), 纵坐标向下为正. 梁有可能与地面(物理上光滑的水平面)接触. 记中性线的右端点的纵坐标值 Y=H>0. 图 1 为正视图, 图中实线为梁的中性线, 点划线满足 Y=H. 设重力加速度为 g>0, 梁的线密度为 D, 梁在静态平衡时中性线满足公式: K = M/EI. (K 是梁的中性线的曲率,M 是弯曲力矩，EI 为梁的截面抗弯刚度). 问题是:

1. 为避免物理单位的选择对数值结果的影响, 以 L 为特征长度, 建立确定梁静态平衡时中性线的无量纲化的数学模型. 比如参数 $a = g\mathrm{DL}^3/\mathrm{EI}$ 及 h=H/L，新变量 x=X/L，y=Y/L，k=KL，及当梁与地面接触时梁对地面的压力与墙外梁重力 gDL 之比值(记为 1-p)等都是无量纲的量.

2. 对中性线的几何形状作定性分析，比如中性线的斜率、曲率、拐点等与参数的关系等展开研究.

3. 设 a=24，h=1/4 时仍在梁的弹性限度之内.

   （1）确定该梁是否与地面接触.

   （2）画出中性线图像(要求 x 与 y 轴的单位长度相等，y 轴正向向下)；

   （3）求中性线上 k 的最大、最小值及所在点的 x，y 坐标；

   （4）求 p 的值及中性线上 k=0 的点的集合；

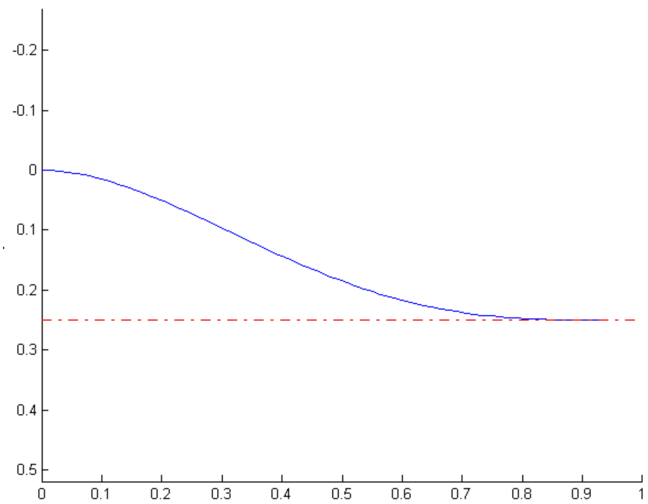

图 1(纵坐标（Y）向下为正方向，仅为示意图，不一定是实际形状)

B 题：容器的设计问题

(1). 要设计一个上无盖的圆锥台形状的容器，上半径为 R, 下半径为 r < R, 高为 h. 求容积为一正常数的条件下, 使该容器的表面积达到最小时的两个比值 $\frac{r}{R}$、$\frac{h}{R}$ 的精确值(用整数的有限次四则及根式运算的最简形式表示)及它们精确到 20 位有效数字的近似值.

(2). 要设计一个上无盖的容器，是一个半径为 R 高为 H 的圆柱面放在一圆锥台上组成的. 圆锥台的上半径为 *R*, 下半径为 *r*<*R*, 高为 *h*. 求容积为一正常数的条件下，使该容器的表面积达到最小的三个比值 $\frac{r}{R}$、$\frac{h}{R}$、$\frac{H}{R}$ 的精确值(意义同题(1)) 及它们精确到 20 位有效数字的近似值.

(3). 要设计一个上无盖的容器，是一个高为 H, 上半径为 L，下半径为 R<L 的圆锥台放在高为 h, 上半径为 R, 下半径为 r<R 的圆锥台上组成的. 求容积为一正常数的条件下，使该容器的表面积达到最小时的四个比值 $\frac{h}{L}$、$\frac{H}{L}$、$\frac{r}{L}$、$\frac{R}{L}$ 的精确到 20 位有效数字的值.

C 题: 一个产品的质量控制与成本核算问题

某厂计划大规模生产的一种产品由零件 A 及零件 B 组成, 设零件 A 的参数 X>0 与零件 B 的参数 Y>0 是独立的均匀分布的随机变量，产品的参数 Z=f(X,Y)=XY 的目标值是 1. 当产品参数值 Z 与目标值 1 的偏差 Z - 1 在±r_1，(r_1=1/100)之内时是正品; 偏差在±r_1 到±r_2 之间时是次品，r_2=2/100; 偏差在±r_2 之外是废品. 正品的市场价单价是 P_1=4000(元), 次品的市场价单价是 P_2=3000(元), 不算加工费时各种成本折算后每件的成本为 P_3=2000(元). 为了成本核算, 考虑付了加工费后是否值得生产. 若用相对精度为 k, (0<k<1) 的机器加工这两个零件, 设 X 的标定值是 X_0>0， 最大偏差±kX_0, Y 的标定值是 Y_0，最大偏差±kY_0 .已知每个零件的加工费用与 k 成反比, 比例系数都是常数 C. 每月的原材料量是固定的. 请完成以下任务

(1). 当 C=0.833292 时, 求 Z 的标定值 $Z_0=X_0Y_0$、加工精度 k、使得单位产品的平均利润最大. 并求单位产品的平均利润达到最大时的平均利润、正品率及次品率.

(2). 当 C 的值多大时最大的平均利润等于零.

(C 题的各数值的最终结果要求舍入并精确到 6 位有效数字)